2016 年第 27 届亚太小学奥林匹克

(上海赛区决赛)

四年级

2 小时
(总分:150 分)
2016 年 2 月 21 日
下午 $12:30-14:30$

(注意事项)
1 尽量解答所有问题。
2 不准使用数学用表或计算器。
3 答案请另填写在所提供的第一回合的作答卷上。
4 只有正确答案才能得分。

【第 1 题】

计算:$(2016+6201+1620+162)\div9=$________。

【分析与解】
计算,位值原理。
2016、6201、1620、162 这四个数相加,2、0、1、6 分别在个位、十位、百位、千位各加了一次;

故 $2016+6201+1620+162=(2+0+1+6)\times1111$;

$(2016+6201+1620+162)\div9=[(2+0+1+6)\times1111]\div9=1111$。

【第 2 题】

定义新运算“Δ”:$a\Delta b=a\times b-(a-b)$,则 $19\Delta11=$________。

【分析与解】
定义新运算。
(方法一)

$19\Delta11=19\times11-(19-11)=201$

(方法二)

$a\Delta b=a\times b-(a-b)=a\times b-a+b=(a\times b-a+b-1)+1=(a+1)\times(b-1)+1$;

$19\Delta11=(19+1)\times(11-1)+1=201$

【第 3 题】

修一条公路，原计划 20 人工作 30 天完成。现在 20 人工作 10 天后，又增加了 20 人，则剩下的部分再用 ________ 天可以完成。

【分析与解】

工程问题。

设工作总量为“1”;

原计划 20 人工作 30 天完成，每人每天工作效率为 $1\div20\div30=\frac{1}{600}$;

现在 20 人工作 10 天后，又增加了 20 人，

则剩下的部分再用 $\left(1-\frac{1}{600}\times20\times10\right)\div\left[(20+20)\times\frac{1}{600}\right]=10$ 天可以完成。

【第 4 题】

甲、乙两人在相距 100 米的地方同时出发同向而行，出发时甲在前乙在后。如果甲每秒跑 4 米，乙每秒跑 2 米，则经过 ________ 秒后两人相距 200 米。

【分析与解】

行程问题，追及问题。

$(200-100)\div(4-2)=50$ 秒。

【第 5 题】

本学期小明共进行了 10 次数学测试，每次测试的满分均为 100 分。小明 10 次测试的平均分是 81 分，如果不计他的最低分，那么其他 9 次测试的平均分最高是 ________ 。

【分析与解】

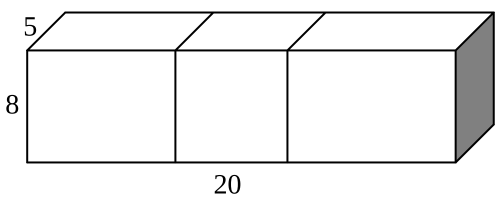
平均数问题。

如果小明最低分为 0 分;

则他其他 9 次测试的平均分最高，为 $(81\times10-0)\div9=90$ 分。

【第 6 题】

如图，把一根长方体木料锯成大小不等的三个小长方体，则表面积比原来增加了 ________ 平方厘米。



【分析与解】

几何，立体几何。

每切一刀，增加两个面;

则一共增加 $2\times2=4$ 个侧面;

故表面积比原来增加了 $(5\times8)\times4=160$ 平方厘米。

【第 7 题】

今年，爷爷的年龄是爸爸的 2 倍，又是小明的10 倍。到 2 年后，爸爸的年龄将是小明的 4 倍。那么爷爷今年 ________ 岁。

【分析与解】

年龄问题。

设小明今年 x 岁，则爷爷今年$10x$ 岁，爸爸今年 $5x$ 岁；

小明 2 年后 $(x+2)$ 岁，爸爸 2 年后 $(5x+2)$ 岁；

由题意，得 $4(x+2)=5x+2$；

解得 $x=6$；

故爷爷今年$10\times6=60$ 岁。

【第 8 题】

一列数1，3，6，10，15，21，…中，从第二个数开始每一个数都是前一个数加上这个数的序号，例如，10 是第 4 个数，它是由前一个数 6 加上它的序号 4 得来的。那么第 2016 个数是 ________ 。

【分析与解】

数列，找规律。

第1个数为1；

第 2 个数为 $3=1+2$；

第 3个数为 $6=1+2+3$；

第 4 个数为$10=1+2+3+4$；

第 5 个数为$15=1+2+3+4+5$；

第 6 个数为 $21=1+2+3+4+5+6$；

……

第 n 个数为$1+2+3+\cdots+n$；

故第 2016 个数是$1+2+3+\cdots+2016=2033136$。

【第 9 题】

一个六位数$\overline{\square2016\square}$能被 45 整除，则这个六位数最大是 ________ 。

【分析与解】

数论，整除。

设这个六位数为 $\overline{A2016B}$；

因为 $45\mid\overline{A2016B}$， $45=5\times9$； 所以 $5\mid\overline{A2016B}$ 且 $9\mid\overline{A2016B}$；

因为 $5\mid\overline{A2016B}$； 所以 $5\mid B$， $B=0$ 或 5；

当 $B=0$ 时， $9\mid\overline{A20160}$， $9\mid A+2+0+1+6+0=A+9$， $A=0$ （舍去）或 9， $\overline{A2016B}=920160$；

当 $B=5$ 时， $9\mid\overline{A20165}$， $9\mid A+2+0+1+6+5=A+14$， $A=4$， $\overline{A2016B}=420165$；

这个六位数最大是920160。

【第 10 题】

一列火车长 600 米，它从路边的一棵大树旁边通过用了 4 分钟；它以同样的速度通过一座大桥，从车头上桥到车尾离桥用了 6 分钟，这座大桥长 ________ 米。

【分析与解】

行程问题，火车过桥。

火车的速度为 $600 \div 4 = 150$ 米/分;

这座大桥长 $150 \times 6 - 600 = 300$ 米。

【第 11 题】

牧场上有一片匀速生长的草地，可供 25 头牛吃 8 天，或可供 30 头牛吃 6 天。那么这片牧场可供 ________ 头牛吃 5 天。

【分析与解】

牛吃草问题。

设1头牛1天吃1份;

25 头牛 8 天吃 $25 \times 8 = 200$ 份;

30 头牛 6 天吃 $30 \times 6 = 180$ 份;

草每天生长 $(200 - 180) \div (8 - 6) = 10$ 份;

牧场原有草量为 $(25 - 10) \times 8 = 120$ 或 $(30 - 10) \times 6 = 120$ 份;

这片牧场可供 $120 \div 5 + 10 = 34$ 头牛吃 5 天。

【第 12 题】

已知 $A \times B \times C = 30$， $B \times C \times D = 60$， $C \times D \times E = 90$。那么 $A \times C \times E =$ ________ 。

【分析与解】

$$A \times C \times E = (A \times B \times C) \times (C \times D \times E) \div (B \times C \times D) = 30 \times 90 \div 60 = 45$$

【第 13 题】

箱子里有足够多的红、黄、蓝、绿四种颜色的球。某小学四年级每一位同学从中取三次球，每次一个，并按先后顺序排成一行。多次操作后，发现总有三人取出的球排列次序完全相同，则这个学校四年级学生最少有 ________ 人。

【分析与解】

计数，最不利原则。

红、黄、蓝、绿四种颜色的球，依次取 3 个，

由乘法原理，有 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 种不同的排列次序;

多次操作后，发现总有三人取出的球排列次序完全相同，

根据最不利原则，这个学校四年级学生最少有 $64 \times 2 + 1 = 129$ 人。

【第 14 题】

从前有座山，山里有个庙，庙里有一些和尚，其中有老和尚、大和尚、小和尚共 60 人。他们每天吃 200 个馒头，老和尚每天吃 4 个，大和尚每天吃 5 个，小和尚每天吃 3 个。已知大和尚人数是老和尚的 2 倍，那么老和尚有 ________ 人。

【分析与解】

鸡兔同笼。

设老和尚有 x 人，则大和尚有 $2x$ 人，小和尚有 $60-x-2x=60-3x$ 人;

由题意，得 $4x+5\times 2x+3(60-3x)=200$;

解得 $x=4$;

老和尚有 4 人。

【第 15 题】

使用数字 7 、10 、13 、19，用加、减、乘、除、添括号中的运算符号，组成一个算式，使得算式结果是 24，算式为 ________________________ 。

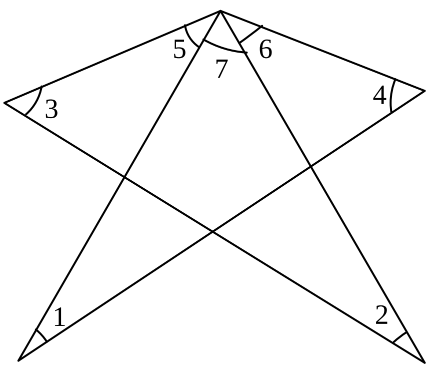
【分析与解】

计算，算 24 点。

$(13\times 19-7)\div 10=24$

【第 16 题】

如图所示，已知 $\angle 7=60^{\circ}$，那么 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7=$ ________ 。



【分析与解】

几何，角度。

由三角形内角和为 180°，得

$\angle 1+\angle 4+(\angle 6+\angle 7)=180^{\circ}$， $\angle 2+\angle 3+(\angle 5+\angle 7)=180^{\circ}$;

又 $\angle 7=60^{\circ}$;

故 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7=\left[\angle 1+\angle 4+(\angle 6+\angle 7)\right]+\left[\angle 2+\angle 3+(\angle 5+\angle 7)\right]-\angle 7$

$=180^{\circ}+180^{\circ}-60^{\circ}=300^{\circ}$。

【第 17 题】

0 是极为重要的数字，它是由古印度人在约公元 5 世纪时发明。在所有四位数中，数字“0”共出现________次。

【分析与解】

计数，乘法原理，加法原理。

$\overline{\square\square\square0}$，$9\times10\times10=900$，即数字“0”在个位出现 900 次;

$\overline{\square\square0\square}$，$9\times10\times10=900$，即数字“0”在十位出现 900 次;

$\overline{\square0\square\square}$，$9\times10\times10=900$，即数字“0”在百位出现 900 次;

故在所有四位数中，数字“0”共出现 $900+900+900=2700$ 次。

【第 18 题】

有黑、白两种颜色的盒子共 30 个，现在小明准备了一些珠子放到盒子里。如果全部放到黑色的盒子里，每个盒子放 8 个还多 2 个；如果全部放到白色的盒子里，每个盒子放 4 个还多 14 个。那么小明共有________个珠子。

【分析与解】

鸡兔同笼。

设有 x 个黑色盒子、y 个白色盒子;

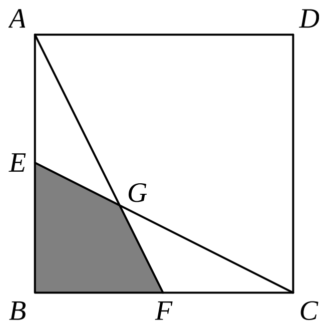
由题意，得 $\begin{cases} x+y=30 \\ 8x+2=4y+14 \end{cases}$;

解得 $\begin{cases} x=11 \\ y=19 \end{cases}$;

小明共有 $8\times11+2=90$ 或 $4\times19+14=90$ 个珠子。

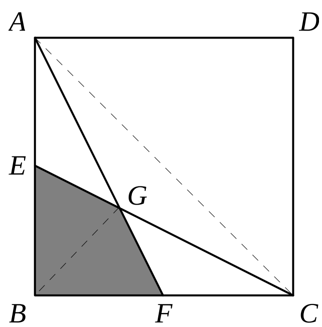
【第 19 题】

如图，$ABCD$ 是边长为15厘米的正方形，E、F 分别为边 AB、BC 的中点，那么阴影部分的面积是________平方厘米。



【分析与解】

几何，燕尾模型，等积变形。



分别联结 AC、BG；

因为 E、F 分别为 AB、BC 的中点，所以 $AE=BE$，$BF=CF$；

根据燕尾模型，$S_{\triangle ABG}:S_{\triangle ACG}=BF:CF=1:1$，$S_{\triangle ACG}:S_{\triangle BCG}=AE:BE=1:1$；

所以 $S_{\triangle ABG}:S_{\triangle ACG}:S_{\triangle BCG}=1:1:1$；

所以 $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle BCG}=S_{\triangle ABC}\times\dfrac{1}{3}$；

因为 $AE=BE$，$BF=CF$；所以 $S_{\triangle AEG}=S_{\triangle BEG}$，$S_{\triangle BFG}=S_{\triangle CFG}$；

所以 $S_{\triangle BEG}=S_{\triangle ABG}\times\dfrac{1}{2}$，$S_{\triangle BFG}=S_{\triangle BCG}\times\dfrac{1}{2}$；

所以 $S_{阴影}=S_{\triangle BEG}+S_{\triangle BFG}=S_{\triangle ABG}\times\dfrac{1}{2}+S_{\triangle BCG}\times\dfrac{1}{2}=\left[\left(S_{\triangle ABC}\times\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}\right]\times 2=S_{\triangle ABC}\times\dfrac{1}{3}$；

因为 $S_{\triangle ABC}=15\times15\div2=\dfrac{225}{2}$；

所以 $S_{阴影}=S_{\triangle ABC}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{225}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{75}{2}=37\dfrac{1}{2}$ 平方厘米。

【第 20 题】

在 r 进制中有这样一个算式：$(120)_r \times (44)_r = (2016)_{10}$,其中结果已转换为十进制，那么 $r=$________。（填数字）

【分析与解】

数论，进制，分解质因数。

$(120)_r = 1\times r^2 + 2\times r^1 + 0\times r^0 = r^2 + 2r = r(r+2)$；

$(44)_r = 4\times r^1 + 4\times r^0 = 4r+4$；

因为 $(120)_r \times (44)_r = (2016)_{10}$；

所以 $r(r+2)\times(4r+4) = 2016$；

$r\times(r+2)\times(r+1) = 504$；

考虑504拆成三个连续的正整数的乘积;

$504 = 2^3\times 3^2\times 7 = 7\times 8\times 9$；

故 $r=7$。

【第 21 题】

乘积 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}$ 的十位上的数字是________。

【分析与解】

数论，同余。

（方法一）

$\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv\underbrace{16\times16\times16\times\cdots\cdots\times16}_{2016个16}(\bmod 100)$；

$16^1\equiv16(\bmod 100)$，$16^2\equiv56(\bmod 100)$，$16^3\equiv56\times16\equiv96(\bmod 100)$，

$16^4\equiv96\times16\equiv36(\bmod 100)$，$16^5\equiv36\times16\equiv76(\bmod 100)$，$16^6\equiv76\times16\equiv16(\bmod 100)$，

故 16^n 的末两位数字以“16，56，96，36，76”5 个为一周期;

$2016\div5=403\cdots\cdots1$；

则 $16^{2016}\equiv16^1=16(\bmod 16)$；

故 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv\underbrace{16\times16\times16\times\cdots\cdots\times16}_{2016个16}=16(\bmod 100)$

乘积 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}$ 的十位上的数字是 1。

（方法二）

$100=4\times25$；

因为 $2016\equiv0(\bmod 4)$；

所以 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv\underbrace{0\times0\times0\times\cdots\cdots\times0}_{2016个0}=0(\bmod 4)$；

因为 $2016\equiv16(\bmod 25)$；

所以 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv\underbrace{16\times16\times16\times\cdots\cdots\times16}_{2016个16}=\underbrace{2^4\times2^4\times2^4\times\cdots\cdots\times2^4}_{2016个2^4}=2^{8064}(\bmod 25)$；

因为 $2^{10}=1024\equiv24(\bmod 25)$；

所以 $2^{20}\equiv24^2=1(\bmod 25)$；

$8064\div20=403\cdots\cdots4$；

$2^{8064}\equiv2^4=16(\bmod 25)$；

故 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv16(\bmod 25)$；

由 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv0(\bmod 4)$ 和 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv16(\bmod 25)$，得

$\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}\equiv16(\bmod 100)$；

乘积 $\underbrace{2016\times2016\times2016\times\cdots\cdots\times2016}_{2016个2016}$ 的十位上的数字是 1。

【第 22 题】

用 0 ~ 9 这 10 个数字组成一个算式，要求每个数字只能使用一次，使得算式成立，其中部分数字已给出，则两位数 $\overline{EF}=$ ________ 。

$$\left(\boxed{A}+\boxed{B}+\boxed{C}+\boxed{D}\right)\times\overline{\boxed{E}\boxed{F}}=\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{6}$$

【分析与解】

数论，分解质因数，数的拆分。

将 2016 分解质因数: $2016=2^5\times3^2\times7$；

而 $A+B+C+D\leqslant 9+8+7+6=30$；

且 $A+B+C+D=2016\div\overline{EF}\geqslant 2016\div98=20.\cdots\cdots$

即 $A+B+C+D$ 是 2016 一个大于 20 且不大于 30 的约数;

在 2016 的约数中，满足大于 20 且不大于 30 的有 21 、 24 、 28；

① 当 $A+B+C+D=21$ 时， $\overline{EF}=2016\div21=96$（数字 6 重复，舍去）;

② 当 $A+B+C+D=24$ 时， $\overline{EF}=2016\div24=84$， 且满足 $3+5+7+9=24$， 即 $\{A,B,C,D\}=\{3,5,7,9\}$；

③ 当 $A+B+C+D=28$ 时， $\overline{EF}=2016\div28=72$，（数字 2 重复，舍去）;

故两位数 $\overline{EF}=84$ 。

【第 23 题】

一个水池上装有一个进水管和一个排水管，而且进水管进水的效率是排水管排水效率的 2 倍。同时打开两个水管，8 个小时可以把水池注满。现早上 6:00 时将两管同时打开，中间某时刻将排水管关闭，中午 12:00 时就已经将水池注满。那么关闭排水管的时刻是 ________ 。

【分析与解】

工程问题。

设排水管每小时排 1 份的水;

则进水管每小时进 $1\times2=2$ 份的水;

水池有 $(2-1)\times8=8$ 份的水。

设从早上 6:00 到中午 12:00，排水管开了 x 小时，关了 y 小时;

由题意，得 $\begin{cases}x+y=6\\(2-1)\times x+2y=8\end{cases}$；

解得 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$；

关闭排水管的时刻是早上 10:00 。

【第 24 题】

三个连续自然数，从小到大依次是11、9、7的倍数，那么这三个自然数的和最小为________。

【分析与解】

数论，同余。

（方法一）

这三个连续自然数中，最大的一个数$\div 11$余2，$\div 9$余1，$\div 7$余0；

由中国剩余定理，$11\times 9\times 0+11\times 7\times 2+9\times 7\times 3=343$符合$\div 11$余2，$\div 9$余1，$\div 7$余0；

$[11,9,7]=693$；

故$693k+341$、$693k+342$、$693k+343$这三个连续自然数，从小到大依次是11、9、7的倍数；

则这三个自然数的和最小为$341+342+343=1026$。

（方法二）

$[11,9,7]=11\times 9\times 7=693$；

则$11\times 9\times 7-11$、$11\times 9\times 7-9$、$11\times 9\times 7-7$依次是11、9、7的倍数，但这三个数不连续；

我们考虑$(11\times 9\times 7-11)\div 2=341$、$(11\times 9\times 7-9)\div 2=342$、$(11\times 9\times 7-7)\div 2=343$；

故$693k+341$、$693k+342$、$693k+343$这三个连续自然数，从小到大依次是11、9、7的倍数；

则这三个自然数的和最小为$341+342+343=1026$。

【第 25 题】

“回文数”是指从首位数读到末位数，与从末位数读到首位数都相同的数（例如：11是两位的回文数，121是三位的回文数，1001是四位的回文数）。现有一个五位的回文数，它同时也是某个回文数的平方，那么这样的五位回文数共有________个。

【分析与解】

由$100^2=10000$、$316^2=99856$、$317^2=100489$；

故设$\overline{ABCBA}=\overline{DED}^2$；

且$D=1$或2或3。

①当$D=1$时，$A=1$；

$101^2=10201$，$111^2=12321$，$121^1=14641$，$131^1=17161$，$151^2=19881$，$161^2=25921$；

其中符合的有$101^2=10201$，$111^2=12321$，$121^1=14641$；

②当$D=2$时，$A=4$；

$202^2=40804$，$212^2=44944$，$222^2=49284$，$232^2=53824$；

其中符合的有$202^2=40804$，$212^2=44944$；

③当$D=3$时，$A=9$；

$303^2=91809$，$313^2=97967$；

均不符合。

综上所述，符合题意的五位回文数共有5个。

【第 26 题】
1、2、3、…、2016 这 2016 个数，数位上数字和为 9 的数共有 ________ 个。
【分析与解】
计数，组合，插板法。

$\overline{0\square\square\square}$：即当千位为 0 时，百位、十位、个位的数字之和为 $9-0=9$；

相当于 3 个不同的人分 9 个相同的苹果；
可以转化为 3 个不同的人分 $9+3=12$ 个相同的苹果，每人至少一个；
由隔板法，有 $C_{11}^{2}=\frac{11\times10}{2\times1}=55$ 种分法；
显然，0 的数字之和为 0；
故 $1\sim999$ 中，数位上数字和为 9 的数有 55 个。

$\overline{1\square\square\square}$：即当千位为 1 时，百位、十位、个位的数字之和为 $9-1=8$；

相当于 3 个不同的人分 8 个相同的苹果；
可以转化为 3 个不同的人分 $8+3=11$ 个相同的苹果，每人至少一个；
由隔板法，有 $C_{10}^{2}=\frac{10\times9}{2\times1}=45$ 种分法；
故 $1000\sim1999$ 中，数位上数字和为 9 的数有 45 个。
$2000\sim2016$：数位上数字和为 9 的数为 2007、2016，有 2 个。
综上所述，$1\sim2016$，数位上数字和为 9 的数共有 $55+45+2=102$ 个。

【第 27 题】
如果有这样一种多位数，每相邻两位中，右边的数字都大于左边的数字，则我们称之为“上升数”。A 是一个五位的上升数，试求每个 $9\times A$ 所得乘积的数字和的总和是 ________ 。
【分析与解】
数论，计数，组合。

设五位数上升数 $A=\overline{abcde}$，其中 a、b、c、d、e 为 $1\sim9$ 且 $a<b<c<d<e$；

$9\times A=A\times10-A=\overline{abcde0}-\overline{abcde}$；

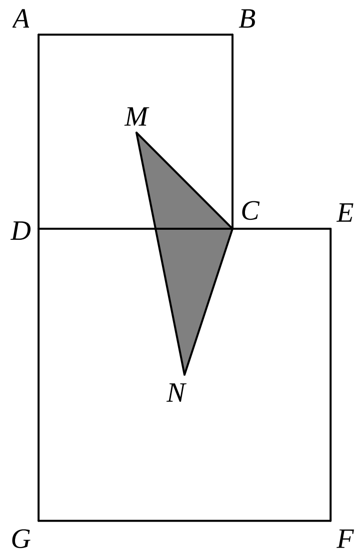
我们知道，每借一次位，差的数字之和增加 9，
除了个位发生借位，其他数位均不发生借位；

故差的数字之和为 $(a+b+c+d+e+0)-(a+b+c+d+e)+9=9$。

从 $1\sim9$ 这 9 个数字中，选出 5 个不同的数字，并按照从小到大顺序排列，即可组成一个五位上升数；
故五位上升数共有 $C_{9}^{5}=\frac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1}=126$ 个；
故每个 $9\times A$ 所得乘积的数字和的总和是 $9\times126=1134$。

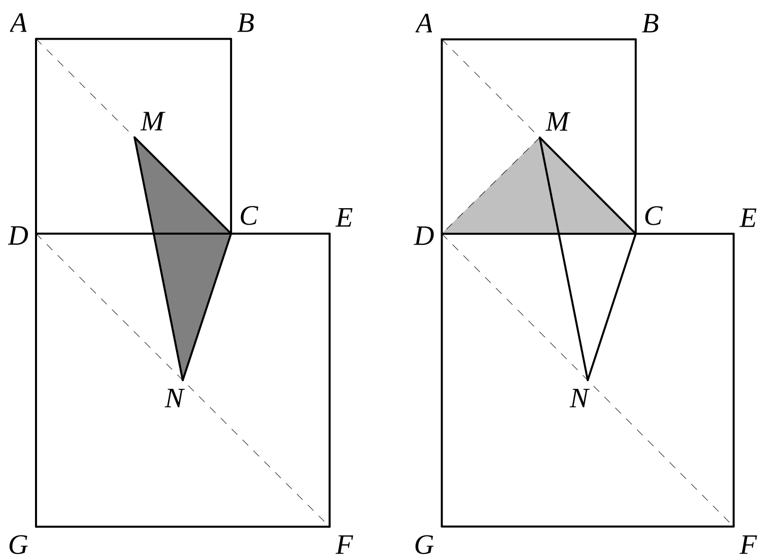
【第 28 题】

如图，边长为8的正方形 $ABCD$ 和边长为12的正方形 $DEFG$ 叠放在一起，M 和 N 分别是两个正方形的中心（正方形对角线的交点），则阴影部分的面积________。



【分析与解】

几何，等积变形。



分别联结 AC、DF、DM，其中对角线 AC、DF 分别过正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 的中心 M、N；

因为 AC、DF 分别是正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$；

所以 $AC // DF$；

所以 $S_{阴影} = S_{\triangle MCD}$；

所以 $S_{\triangle MCD} = S_{正方形ABCD} \div 4 = 8^2 \div 4 = 16$；

所以 $S_{阴影} = 16$。

【第 29 题】

将$1\sim2016$的所有自然数任意分成224组，每一组9个数，如果将每一组的9个数从小到大排列，处于中间的数我们称其为“中立数”，例如$(9,13,17,19,20,31,36,41,45)$中，20为“中立数”，对于每一种分法都会产生224个“中立数”，那么这224个“中立数”的和最小是________。

【分析与解】

对于每一个“中立数”都存在4个比它小的数、4个比它大的数。

按照“中立数”从小到大的顺序，分为第1、2、…、224组;

（即第1组的“中立数”＜第2组的“中立数”＜…＜第224组的“中立数”）

第1组的“中立数”要比第1组的前4个数大，

故第1组的“中立数”最小是5；

第2组的“中立数”要比第1组的前5个数以及第2组的前4个数大，

故第2组的“中立数”最小是10；

第3组的“中立数”要比第1、2组的前5个数以及第3组的前4个数大，

故第3组的“中立数”最小是15；

……

第224组的“中立数”要比第1、2、…、223组的前5个数以及第224组的前4个数大，

故第224组的“中立数”最小是1120；

故这224个“中立数”的和不小于$5+10+15+\cdots+1120=(5+1120)\times224\div2=126000$。

构造如下:

从1开始顺次数到1120，每5个数一组分成224组，

然后将1121到2016这50个数任意分给这224组，

例如：$(1,2,3,4,5,1121,1122,1123,1124)$，$(6,7,8,9,10,1125,1126,1127,1128)$，

$(11,12,13,14,15,1129,1130,1131,1132)$，……，$(1116,1117,1118,1119,1120,2013,2014,2015,2016)$。

综上所述，这224个“中立数”的和最小是126000。

【第 30 题】

数字“6”是物质世界的宇宙数字，因此埃及人选择这个数字来代表时间和空间，在西方人们通常也把它称作“奉献数”。如果正整数α及其数字和均为6的倍数，那么我们称α为“绝对奉献数”。则在1、2、3、…、2016这2016个数不是“绝对奉献数”的共有________个。

【分析与解】

$6=2\times3$;

如果一个数能被2整除，则其个位数字能被2整除，即个位数字为偶数;

如果一个数能被3整除，则其各个数位上的数字之和能被3整除;

故“绝对奉献数”因满足其数字和为6的倍数且个位数字是偶数。

我们考虑$1\sim1999$的数，并设其为广义四位数$\overline{abcd}$，其中a为$0\sim1$，b、c、d为$0\sim9$;

两个数字之和为n的方法数为$f(n)$；当$0\leqslant n\leqslant9$时，$f(n)=n+1$；当$10\leqslant n\leqslant18$时，$f(n)=19-n$;

当$a=0$，$d=0$，有$f(6)+f(12)+f(18)=7+7+1=15$个;

当$a=1$，$d=0$，有$f(5)+f(11)+f(17)=6+8+2=16$个;

当$a=0$，$d=2$，有$f(4)+f(10)+f(16)=5+9+3=17$个;

当$a=1$，$d=2$，有$f(3)+f(9)+f(15)=4+10+4=18$个;

当$a=0$，$d=4$，有$f(2)+f(8)+f(14)=3+9+5=17$个;

当$a=1$，$d=4$，有$f(1)+f(7)+f(13)=2+8+6=16$个;

当$a=0$，$d=6$，有$f(0)+f(6)+f(12)+f(18)=1+7+7+1=16$个;

当$a=1$，$d=6$，有$f(5)+f(11)+f(17)=6+8+2=16$个;

当$a=0$，$d=8$，有$f(4)+f(10)+f(16)=5+9+3=17$个;

当$a=1$，$d=8$，有$f(3)+f(9)+f(15)=4+10+4=18$个;

故$1\sim1999$中，“绝对奉献数”有$15+16+17+18+17+16+16+16+17+18=166$个

$2000\sim2016$中，“绝对奉献数”有1个：2004;

故$1\sim2016$中，“绝对奉献数”有$166+1=167$个;

$1\sim2016$中不是“绝对奉献数”有$2016-167=1849$个。