

鸡兔同笼问题

例 1 （古典题）鸡兔同笼，头共 46，足共 128，鸡兔各几只？

分析 如果 46 只都是兔，一共应有 $4 \times 46 = 184$ 只脚，这和已知的 128 只脚相比多了 $184 - 128 = 56$ 只脚.如果用一只鸡来置换一只兔，就要减少 $4 - 2 = 2$ （只）脚.那么，46 只兔里应该换进几只鸡才能使 56 只脚的差数就没有了呢？显然， $56 \div 2 = 28$ ，只要用 28 只鸡去置换 28 只兔就行了.所以，鸡的只数就是 28，兔的只数是 $46 - 28 = 18$ 。

解：①鸡有多少只？

$$(4 \times 46 - 128) \div (4 - 2)$$

$$= (184 - 128) \div 2$$

$$= 56 \div 2$$

$$= 28 \text{（只）}$$

②兔有多少只？

$$46 - 28 = 18 \text{（只）}$$

答：鸡有 28 只，兔有 18 只。

我们来总结一下这道题的解题思路：先假设它们全是兔.于是根据鸡兔的总只数就可以算出在假设下共有几只脚，把这样得到的脚数与题中给出的脚数相比较，看相差多少.每差 2 只脚就说明有一只鸡；将所差的脚数除以 2，就可以算出共有多少只鸡.我们称这种解题方法为假设法.概括起来，解鸡兔同笼问题的基本关系式是：

$$\text{鸡数} = (\text{每只兔脚数} \times \text{兔总数} - \text{实际脚数}) \div (\text{每只兔子脚数} - \text{每只鸡的脚数})$$

$$\text{兔数} = \text{鸡兔总数} - \text{鸡数}$$

当然，也可以先假设全是鸡。

例 2 鸡与兔共有 100 只，鸡的脚比兔的脚多 80 只，问鸡与兔各多少只？

分析 这个例题与前面例题是有区别的，没有给出它们脚数的总和，而是给出了它们脚数的差.这又如何解答呢？

假设 100 只全是鸡，那么脚的总数是 $2 \times 100 = 200$ （只）这时兔的脚数为 0，鸡脚比兔脚多 200 只，而实际上鸡脚比兔脚多 80 只.因此，鸡脚与兔脚的差数比已知多了 $(200 - 80) = 120$ （只），这是因为把其中的兔换成了鸡.每把一只兔换成鸡，鸡的脚数将增加 2 只，兔的脚数

减少 4 只.那么,鸡脚与兔脚的差数增加 $(2+4)=6$ (只),所以换成鸡的兔子有 $120\div 6=20$ (只).
有鸡 $(100-20)=80$ (只)。

解: $(2\times 100-80)\div (2+4)=20$ (只)。

$100-20=80$ (只)。

答: 鸡与兔分别有 80 只和 20 只。

例 3 红英小学三年级有 3 个班共 135 人,二班比一班多 5 人,三班比二班少 7 人,三个班各有多少人?

分析 1 我们设想,如果条件中三个班人数同样多,那么,要求每班有多少人就很容易了.由此得到启示,是否可以通过假设三个班人数同样多来分析求解。

结合下图可以想,假设二班、三班人数和一班人数相同,以一班为标准,则二班人数要比实际人数少 5 人.三班人数要比实际人数多 $7-5=2$ (人).那么,请你算一算,假设二班、三班人数和一班人数同样多,三个班总人数应该是多少?

解法 1:

一班: $[135-5+(7-5)]\div 3=132\div 3$

$=44$ (人)

二班: $44+5=49$ (人)

三班: $49-7=42$ (人)

答: 三年级一班、二班、三班分别有 44 人、49 人和 42 人。

分析 2 假设一、三班人数和二班人数同样多,那么,一班人数比实际要多 5 人,而三班要比实际人数多 7 人.这时的总人数又该是多少?

解法 2: $(135+5+7)\div 3$

$=147\div 3$

$=49$ (人)

$49-5=44$ (人), $49-7=42$ (人)

答: 三年级一班、二班、三班分别有 44 人、49 人和 42 人。

想一想: 根据解法 1、解法 2 的思路,还可以怎样假设? 怎样求解?

例4 刘老师带了41名同学去北海公园划船,共租了10条船.每条大船坐6人,每条小船坐4人,问大船、小船各租几条?

分析 我们分步来考虑:

①假设租的10条船都是大船,那么船上应该坐 $6 \times 10 = 60$ (人)。

②假设后的总人数比实际人数多了 $60 - (41 + 1) = 18$ (人),多的原因是把小船坐的4人都假设成坐6人。

③一条小船当成大船多出2人,多出的18人是把 $18 \div 2 = 9$ (条)小船当成大船。

解: $[6 \times 10 - (41 + 1)] \div (6 - 4)$

$= 18 \div 2 = 9$ (条)

$10 - 9 = 1$ (条)

答:有9条小船,1条大船。

例5 有蜘蛛、蜻蜓、蝉三种动物共18只,共有腿118条,翅膀20对(蜘蛛8条腿;蜻蜓6条腿,两对翅膀;蝉6条腿,一对翅膀),求蜻蜓有多少只?

分析 这是在鸡兔同笼基础上发展变化的问题.观察数字特点,蜻蜓、蝉都是6条腿,只有蜘蛛8条腿.因此,可先从腿数入手,求出蜘蛛的只数.我们假设三种动物都是6条腿,则总腿数为 $6 \times 18 = 108$ (条),所差 $118 - 108 = 10$ (条),必然是由于少算了蜘蛛的腿数而造成的.所以,应有 $(118 - 108) \div (8 - 6) = 5$ (只)蜘蛛.这样剩下的 $18 - 5 = 13$ (只)便是蜻蜓和蝉的只数.再从翅膀数入手,假设13只都是蝉,则总翅膀数 $1 \times 13 = 13$ (对),比实际数少 $20 - 13 = 7$ (对),这是由于蜻蜓有两对翅膀,而我们只按一对翅膀计算所差,这样蜻蜓只数可求 $7 \div (2 - 1) = 7$ (只)。

解: ①假设蜘蛛也是6条腿,三种动物共有多少条腿?

$6 \times 18 = 108$ (条)

②有蜘蛛多少只?

$(118 - 108) \div (8 - 6) = 5$ (只)

③蜻蜓、蝉共有多少只?

$18 - 5 = 13$ (只)

④假设蜻蜓也是一对翅膀，共有多少对翅膀？ $1 \times 13 = 13$ （对）

⑤蜻蜓多少只？

$$(20 - 13) \div 2 - 1 = 7 \text{（只）}$$

答：蜻蜓有 7 只。